TRƯỜNG ĐẠI HỌC VĂN LANG
KHOA CNTT

ĐỀ THI HỌC PHẦN ĐSTT
Học kỳ 1 Năm học 2023-2024

I. Thông tin chung

Học phần: Đại số tuyến tính và ứng dụng. **Số tín chỉ: …3. Đáp án số 3 (thi Lần 2)**

Mã học phần: 71MATL10053 **Mã nhóm lớp học phần 231_71MATL10053_01,2,3,7,8**

Thời gian làm bài: 75 phút **Hình thức thi: Tự luận.**

SV được tham khảo tài liệu: **Có ☒** **Không ☐**

Giảng viên nộp đề thi, đáp án **Lần 1 ☐** **Lần 2 ☒**

II. Các yêu cầu của đề thi nhằm đáp ứng CLO

(phần này phải phối hợp với thông tin từ đề cương chi tiết của học phần)

Ký hiệu CLO	**Nội dung CLO**	**Hình thức đánh giá**	**Trọng số CLO trong thành phần đánh giá (%)**	**Câu hỏi thi số**	**Điểm số tối đa**	**Lấy dữ liệu đo lường mức đạt PLO/PI**
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
CLO 1	Tìm ma trận	cho điểm	25%	1	2,5	25%
CLO 2	Tọa độ ma trận chuyển cơ sở	Cho điểm	25%	2	2,5	25%
CLO 3	Giải hệ phương trình tuyến tính	Cho điểm	25%	3	2,5	25%
CLO 4	Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc	Cho điểm	25%	4	2,5	25%

III. Đề thi và đáp án

Câu 1: (2,5 điểm)

Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận B sao cho : AB = BA

Giải:

Đặt: $B=\begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix}$ (*0.5 điểm*). Theo bài ra: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(*0.5 điểm*)

Ta có :

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ -a+x & -b+y \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-b & b \\ x-y & y \end{bmatrix}$$ (*0.5 điểm*)

$$AB=BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -a+x & -b+y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-b & b \\ x-y & y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=a-b \\ b=b \\ -a+x=x-y \\ -b+y=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a \\ b=0 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

(*0.5 điểm*)

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix} a & 0 \\ x & a \end{bmatrix}, Vi..du..a=1, x=2, thi: B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$ (*0.5 điểm*)

Câu 2: (2,5 điểm)

Trong $\mathbb{R}^2$, xét hai cơ sở:

$$B_1 = \{u_1 = (1,0); u_2 = (0,-1)\}$$
$$B_2 = \{v_1 = (2,1); v_2 = (-1,1)\}$$

Cho biết: $[x]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Tìm $[x]_{B_1}$

Giải:

Ta có : $\begin{cases} v_1 = 2u_1 - u_2 \\ v_2 = -u_1 - u_2 \end{cases}$ (*0.5 điểm*)

$$[x]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = v_1 + 2v_2$$ (*1.0 điểm*)

$$\Rightarrow [x]_{B_1} = (2u_1 - u_2) + 2(-u_1 - u_2)$$

$$\Rightarrow [x]_{B_1} = -3u_2 \Rightarrow [x]_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(*1.0 điểm*)

Câu 3: (2,5 điểm) Giải Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

Giải:

Xét ma trận bổ sung

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 := (-1)d_1 + d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

(*1.0điểm*)

$$\xrightarrow{d_3 := (-2)d_2 + d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 - x_4 - 1 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 + 2 \end{cases}$$ (*0.5 điểm*)

Ẩn chính ta lấy là x_1, x_2 ẩn tự do $x_3 = s, x_4 = t$

ta được (*0.5 điểm*)

$$\begin{cases} x_1 = 2s - t - 1 \\ x_2 = s + 2t + 2 \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có vô số nghiệm và tập nghiệm là :

$$\left\{\left(2s - t - 1, s + 2t + 2, s, t\right) : s, t \in \mathbb{R}\right\}$$ (*0.5 điểm*)

Câu 4: (2,5 điểm)

Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

$$\varphi\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2$$

Giải: Ta có :

$$\varphi\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2$$
$$\Rightarrow \varphi\left(x_1, x_2, x_3\right) = (x_1^2 + 4x_1x_2) + 7x_2^2 + 4x_3^2 ..(1)$$

(*0.5 điểm*)

Đưa biểu thức $x_1^2 + 4x_1x_2$ **về dạng chính tắc:**

$$x_1^2 + 4x_1x_2 = \left(x_1 + 2x_2\right)^2 - 4x_2^2 ..(2)$$

(*0.5 điểm*)

Thế (2) vào (1) ta được:

$$\varphi\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 + 2x_2\right)^2 - 4x_2^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2$$
$$\Rightarrow \varphi\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 + 2x_2\right)^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2$$

(*0.5 điểm*)

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Thì $\varphi\left(x_1, x_2, x_3\right)$ **có dạng chính tắc:** (*0.5 điểm*)

$$\varphi\left(y_1, y_2, y_3\right) = y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2$$

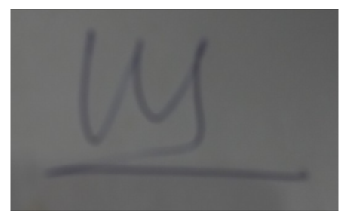
Và ma trận của phép biến đổi có dạng: (*0.5 điểm*)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-------------------Hết-------------------

TP. Hồ Chí Minh, ngày 12. tháng 11. năm 2023.

GIẢNG VIÊN RA ĐỀ



PGS.TS.Nguyễn Văn Lộc.