

ĐẠI HỌC VĂN LANG

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

ĐÁP ÁN KIỂM TRA CUỐI KÌ I-NĂM HỌC 2018-2019 L2

Môn: Toán cao cấp

Khóa K24KT

Thời gian: 90 phút

Câu 1 (1 điểm). Tìm ma trận  $A$  biết  $A = -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}^T$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

Giải

$$\begin{aligned} A &= -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}^T = -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Câu 2 (2 điểm) Giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 10 \end{cases}$$

Giải

Gọi  $A$  và  $\bar{A}$  lần lượt là ma trận hệ số và ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình đã cho. Khi đó

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 9 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{d_2 = d_2 - d_1 \\ d_3 = d_3 - 2d_1}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{d_3 = d_3 - 2d_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right]$$

Do  $r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 4 =$  số ẩn, nên hệ phương trình có vô số nghiệm. Khi đó hệ phương trình tương đương với hệ đã cho là

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_4 = 1 \\ 3x_4 = 6 \end{cases} .$$

Đặt  $x_3 = t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ta tính được  $x_4 = 2; x_2 = -3; x_1 = -4 - 2t$ . (1,5đ)

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình  $(-2t, -1, t, 2) \forall t \in \mathbb{R}$ . (0.5đ)

**Câu 3 (2 điểm).**

a. Tìm đạo hàm của hàm số:  $y = e^{\sin x} \ln(x^2 + 1)$ .

b. Tính  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^4}{x^3 - 2x^2 + x}$ .

**Giải**

a. Đạo hàm của hàm số đã cho

$$\begin{aligned} y' &= (e^{\sin x})' \ln(x^2 + 1) + e^{\sin x} (\ln(x^2 + 1))' \\ &= \cos x e^{\sin x} \ln(x^2 + 1) + e^{\sin x} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}. \end{aligned} \quad (1đ)$$

b. Do  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^4 = 0; \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + x) = 0$  nên áp dụng quy tắc L'Hospital ta được

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^4}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x-1)^3}{3x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12(x-1)^2}{6x - 4} = 0. \quad (1đ)$$

**Câu 4 (3 điểm).** Tính các tích phân sau

a.  $\int (e^x - 1)^2 e^x dx$                       b.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx$

**Giải**

a. Đặt  $u = e^x$  thì  $du = e^x dx$ .

$$\text{Khi đó } \int (e^x - 1)^2 e^x dx = \int (u - 1)^2 du = \frac{1}{3}(u - 1)^3 = \frac{1}{3}(e^x - 1)^3 + C. \quad (1,5đ)$$

b.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^5} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-5} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{5} x^{-4} \Big|_1^t$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{5x^4} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{5} \left( \frac{1}{t^4} - 1 \right) = \frac{1}{5}.$$

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ. (1,5đ)

**Câu 3 (2 điểm).** Tìm cực đại địa phương, cực tiểu địa phương và điểm yên ngựa (nếu có) của hàm số

$$f(x, y) = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y.$$

**Giải**

Điểm tới hạn của hàm  $f(x, y)$  được xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 6y^2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ y = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hàm số có bốn điểm tới hạn là  $(1; 1), (-1; 1), (1; -1), (-1; -1)$ . (1đ)

Lại có

$$f_{xx}(x, y) = 6x; f_{xy}(x, y) = 0; f_{yy}(x, y) = 12y.$$

$$\text{Nên } D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = 72xy.$$

Tính  $D(1, 1) = 72 > 0$  và  $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$  nên  $f(1, 1)$  là giá trị cực tiểu địa phương của hàm số.

Tính  $D(-1, -1) = 72 > 0$  và  $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$  nên  $f(-1, -1)$  là giá trị cực đại địa phương của hàm số.

Tính  $D(-1, 1) = -72 < 0$  nên  $(-1, 1)$  là điểm yên ngựa của hàm số.

Tính  $D(1, -1) = -72 < 0$  nên  $(1, -1)$  là điểm yên ngựa của hàm số. (1đ)

*Người soạn*

Trịnh Quốc Thành